第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

高一　第1试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 集合 $M=\{x \mid y=\sqrt{-x^2+6x+7}, x, y \in \mathbf{R}\}$,$N=\{y \mid y=\sqrt{-x^2+6x+7}, x, y \in \mathbf{R}\}$,则集合 $M \cap N=$(　　)

(A) $\varnothing$.　　(B) $[-1,4]$.　　(C) $[-1,7]$.　　(D) $[0,4]$.

2. 设 m, n 是自然数,条件甲:m^3+n^3 是偶数;条件乙:$m-n$ 是偶数,则甲是乙的(　　)

(A) 充分不必要条件.　　(B) 必要不充分条件.

(C) 充分且必要条件.　　(D) 既不充分也不必要条件.

3. 已知直二面角 $\beta-l-\gamma$,直线 $a \subset$ 平面 β,直线 $b \subset$ 平面 γ,且 a 和 b 都不垂直于 l,那么,a 与 b(　　)

(A) 可能垂直,但不可能平行.　　(B) 不可能垂直,但可能平行.

(C) 可能垂直,也可能平行.　　(D) 不可能垂直,也不可能平行.

4. 设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的乘积,若 $a_9=1$,则下面的等式中正确的是(　　)

(A) $S_1=S_{19}$.　　(B) $S_3=S_{17}$.　　(C) $S_5=S_{12}$.　　(D) $S_8=S_{11}$.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=0$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$,则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2012}=$(　　)

(A) $-\sqrt{3}$.　　(B) 0.　　(C) $\sqrt{3}$.　　(D) $1006\sqrt{3}$.

6. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=60^\circ$,$2AB=3BC$,则 $\tan A$ 的值等于(　　)

(A) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　　(B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　(D) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Suppose $\triangle ABC$ is a triangle with the side length of 2, D and E are moving points on the sides BC and AC. $AD \perp BE$ at point M, then the length of M's trajectory is(　　)

(A) $\dfrac{\pi}{2}$.　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$.　　(C) $\dfrac{\pi}{4}$.　　(D) $\dfrac{\pi}{6}$.

(英汉词典:trajectory 轨迹)

8. 若 $f(1,1)=1234$,$f(x,y)=k$,$f(x,y+1)=k-3$,则 $f(1,2012)=$(　　)

(A) -6033.　　(B) -4799.　　(C) 1235.　　(D) 2012.

9. 下面判断正确的是(　　)

(A) $b^2-4ac \geqslant 0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 有解的充分且必要条件.

(B) $b^2-4ac<0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 无解的充分且必要条件.

(C) $c \neq 0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 无解的必要不充分条件.

(D) $b^2-4ac>0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 有解的必要不充分条件.

10. 已知函数 $f(x)=m|x-1|$ $(m\in\mathbf{R}$，且 $m\neq 0)$. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,\cos\theta)$，$\boldsymbol{b}=(2,2\sin\theta)$，$\boldsymbol{c}=(4\sin\theta,1)$，$\boldsymbol{d}=\left(\frac{1}{2}\sin\theta,1\right)$. 当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ 与 $f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$ 的大小关系是(　　)

(A) $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})<f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$.

(B) $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})>f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$.

(C) $m>0$ 时，$f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})<f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$；$m<0$ 时，$f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})>f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$.

(D) $m>0$ 时，$f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})>f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$；$m<0$ 时，$f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})<f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$.

二、A 组填空题(每小题 4 分，共 40 分.)

11. 设 $\alpha\in[0,2\pi)$，则在 $[0,2\pi)$ 内，终边与 α 角的终边关于 x 轴对称的角是__________.

12. 函数 $f(x)=3^{-|\log_2 x|}-4|x-1|$ 的值域是__________.

13. 若 a,b,c 是三个互不相等的实数，且满足关系式 $b^2+c^2=2a^2+16a+14$，$bc=a^2-4a-5$，则 a 的取值范围是__________.

14. 若 a,b 是正实数，且 $a+b=2$，则 $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$ 的最小值是__________.

15. $y=a\sin(ax+b)+b$, if the minimum value of y is $\frac{1}{2}$, the maximum value is $\frac{5}{2}$, then $ab=$__________.

16. 设点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，$GA=2\sqrt{3}$，$GB=2\sqrt{2}$，$GC=2$. 则 $\triangle ABC$ 的面积$=$__________.

17. 已知 $0.8<x<0.9$，若将 x,x^x,x^{x^x} 按从小到大的顺序排列，应当是__________.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和是 S_n，若 $S_8\leqslant 5$，$S_{11}\geqslant 23$，则 a_{10} 的最小值是__________.

19. 若 $a\#b=a+b-ab$，则下列等式中：

①$a\#b=b\#a$.　　②$a\#0=a$.　　③$(a\#b)\#c=a\#(b\#c)$.

正确的是__________.(填序号)

20. $\odot O$ 与 $\odot D$ 相交于 A,B 两点，BC 是 $\odot D$ 的切线，点 C 在 $\odot O$ 上，且 $AB=BC$. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 S，则 $\odot D$ 的半径的最小值是__________.

三、B 组填空题(每小题 8 分，共 40 分.)

21. 已知 $1\leqslant x\leqslant 8$，则函数 $f(x)=|x-3|+|x-5|+|x-7|$ 的最大值是__________，最小值是__________.

22. α,β 是关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+m^2-4=0$ 的两个实根，设 $y=\alpha^2+\beta^2$，则 $y=f(m)$ 的解析式是__________，值域是__________.

23. 已知 $\triangle ABC$ 三条边长分别为 $a=t^2+3$，$b=-t^2-2t+3$，$c=4t$，$t\in\mathbf{R}$，则 $\triangle ABC$ 的最大内角是角__________，它的度数等于__________.

24. 方程 $x^2+\log_{16}x=0$ 的解是__________；使不等式 $x^2-\log_m x<0$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上恒成立的 m 的取值范围是__________.

25. 若函数 $f(x)=\log_a(x^2-2ax+1-2a^2)$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最大值是 2，则 $a=$__________，$f(x)$ 的单调递增区间是__________.