

# 第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

## 高二 第1试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 集合  $P = \{x \mid |x| \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $Q = \{x \mid |\sqrt{x} - 1| \leq 1, x \in \mathbf{Z}\}$ , 则  $P \cap Q = (\quad)$   
(A)  $(0, 1)$ . (B)  $\{0, 1\}$ . (C)  $[0, 1]$ . (D)  $[-1, 1]$ .

2. 已知  $x > 0$ ,  $A = \log_3(1 + \sqrt{x})$ ,  $B = \log_4 x$ , 则  $A$  与  $B$  的大小关系是  $(\quad)$   
(A)  $A > B$ . (B)  $A = B$ . (C)  $A < B$ . (D) 随  $x$  的值而定.

3. 有若干同心圆, 其半径是公比为  $q (q > 1)$  的等比数列, 相邻的两个圆组成一个圆环, 则这些圆环的面积  $(\quad)$

(A) 不是等比数列. (B) 是等比数列, 公比为  $q$ .  
(C) 是等比数列, 公比为  $q^2$ . (D) 是等比数列, 公比为  $q^2 - 1$ .

4. 设  $a, b$  是两个非零向量, 则“ $a$  和  $b$  同向”是“ $(a \cdot b)^2 = (a \cdot a)(b \cdot b)$ ”的  $(\quad)$   
(A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.  
(C) 充分且必要条件. (D) 既不充分也不必要条件.

5. 已知  $x, y \in \mathbf{R}$ , 且  $3^x + 5^{-y} \leq 3^y + 5^{-x}$ , 则下列关系式中成立的是  $(\quad)$   
(A)  $e^{x-y} \geq 1$ . (B)  $e^{y-x} \geq 1$ . (C)  $\ln(x-y) \geq 0$ . (D)  $\ln(y-x+1) \geq 1$ .

6. The range of values for the function  $y = x + \sqrt{1-x^2}$  is  $(\quad)$   
(A)  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . (B)  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . (C)  $[-1, \sqrt{2}]$ . (D)  $(-1, \sqrt{2})$ .

7. 方程  $x + y - 2 + x\sqrt{x^2+2} + (y-2)\sqrt{y^2-4y+6} = 0$  的正整数解的个数是  $(\quad)$   
(A) 1. (B) 2. (C) 5. (D) 无穷多.

8. 已知正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 = a$ ,  $AB = 2a$ ,  $M, N, E$  分别是  $AB, AC, A_1B_1$  的中点, 那么平面  $BCE$  与平面  $MNE$  所成二面角的余弦值是  $(\quad)$

(A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (B)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ . (C)  $\frac{\sqrt{7}}{7}$ . (D)  $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ .

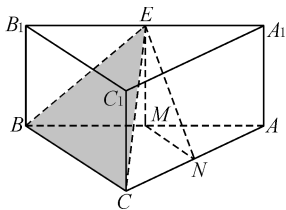


图 1

9. 椭圆  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  的内接正方形的面积和内接矩形的最大面积的比等于  $(\quad)$

(A)  $\frac{3}{4}$ . (B)  $\frac{4}{5}$ . (C)  $\frac{5}{6}$ . (D)  $\frac{7}{8}$ .

10. 定义: 过双曲线焦点的直线与双曲线交于  $A, B$  两点, 则线段  $AB$  称为该双曲线的焦点弦. 已知双曲线  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ , 那么过该双曲线左焦点, 长度为整数且不超过 2012 的焦点弦的条数是  $(\quad)$

(A) 4005. (B) 4018. (C) 8023. (D) 8036.

二、A 组填空题(每小题 4 分,共 40 分.)

11. 若定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $f(x)$  和奇函数  $g(x)$  满足:  $f(x) + g(x) = x^2 + x + 1$ , 则  $g(2) =$  \_\_\_\_\_.

12. 函数  $y = e^{2x+1} - e^x (x \in \mathbf{R})$  的单调递减区间是 \_\_\_\_\_.

13. 平面直角坐标系中, 已知点  $A(2, 1)$ , 动点  $B$  在  $x$  轴上, 动点  $C$  在直线  $y = x$  上, 那么  $\triangle ABC$  的周长的最小值是 \_\_\_\_\_.

14. 已知  $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ , 则  $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) =$  \_\_\_\_\_.

15. 设  $A = \left\{ n \mid \frac{2011^n + 2013^n}{2012} \in \mathbf{Z}^+, n \in \mathbf{Z}^+ \right\}$ , 将  $A$  中的元素从小到大地排列为:  $a_1, a_2, \dots$ , 则  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2012} =$  \_\_\_\_\_.

16. 已知数列  $\{x_n\}$  中,  $x_1 = 3, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}$ , 则数列  $\{x_n\}$  的通项公式  $x_n =$  \_\_\_\_\_.

17. 设  $A$  是半径为 5 的  $\odot O$  上的一个定点, 单位向量  $\mathbf{b}$  在  $A$  点处与  $\odot O$  相切, 点  $P$  是  $\odot O$  上的一个动点, 且点  $P$  与点  $A$  不重合, 则  $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{b}$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

18. Suppose the equation  $x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0$  has two unequal real roots  $x_1, x_2$ , which satisfy  $|x_i - 1| < 3 (i = 1, 2)$ . Then the range of values for the real number  $k$  is \_\_\_\_\_.

19. 如图 2, 在正四面体  $ABCD$  中,  $P_1, P_2$  是  $BC$  的 3 等分点, 过这两个分点分别作  $CD$  的平行线  $P_1Q_1, P_2Q_2$ , 其中  $Q_1, Q_2$  在  $BD$  上, 则点  $B$  到平面  $AP_1Q_1, AP_2Q_2$  的距离之比是 \_\_\_\_\_.

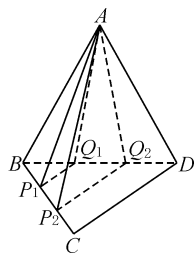


图 2

20. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左、右焦点分别是  $F_1, F_2$ , 正三角形  $AF_1F_2$  的一边  $AF_1$  与双曲线左支交于点  $B$ , 且  $\overrightarrow{AF_1} = 4\overrightarrow{BF_1}$ , 则双曲线  $C$  的离心率的值是 \_\_\_\_\_.

三、B 组填空题(每小题 8 分,共 40 分.)

21. 一个正数的小数部分、整数部分及它自身构成等比数列, 则该数的整数部分是 \_\_\_\_\_, 小数部分是 \_\_\_\_\_.

22. 已知正三棱锥的侧面积与底面积之比等于  $\lambda$ , 则此三棱锥的侧棱与底面边长的比等于 \_\_\_\_\_, 侧棱与底面所成角的正弦值等于 \_\_\_\_\_.

23. 设曲线  $y = x^{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$  在点  $(1, 1)$  处的切线与  $x$  轴的交点的横坐标为  $x_n$ , 则  $x_n =$  \_\_\_\_\_,  $\log_{2012} x_1 + \log_{2012} x_2 + \dots + \log_{2012} x_{2011} =$  \_\_\_\_\_.

24. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ , 则  $f(x)$  的最小正周期是 \_\_\_\_\_. 若函数  $f(x)$  的图象按向量  $\mathbf{b} = (m, n)$  平移后, 所得的图象与函数  $g(x) = \sin 2x + 1$  的图象重合, 且  $|m| < \frac{\pi}{2}$ , 则  $\mathbf{b} =$  \_\_\_\_\_.

25. 已知  $f(x) = \begin{cases} e^{|\ln x|}, & 0 < x \leq 5, \\ -x + 10, & x > 5. \end{cases}$  若方程  $f(x) = k (k \text{ 是常数})$  有三个不同的实数根  $a, b, c$ , 且  $a < b < c$ , 则  $ab =$  \_\_\_\_\_,  $c$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

